β-mélange pour des processus ponctuels

Gabriel Lang, Félix Cheysson

23 mars 2026

Motivation

Article précédent :

- Classe de processus de Hawkes linéaires.
- Propriété faible (α-mélange), permettant juste d'établir des conditions de théorème central limite en estimation paramétrique.

Nouvel article :

- Classe de processus de Hawkes non linéaires. Inhibition entre points.
- Propriété plus forte de β-mélange, mêmes résultats que pour variables indépendantes.

Motivation

Article précédent :

- Classe de processus de Hawkes linéaires.
- Propriété faible (α-mélange), permettant juste d'établir des conditions de théorème central limite en estimation paramétrique.

Nouvel article :

- Classe de processus de Hawkes non linéaires. Inhibition entre points.
- Propriété plus forte de β-mélange, mêmes résultats que pour variables indépendantes.

Coefficient haddock qui a insuflé tan de nouveaux résultats.

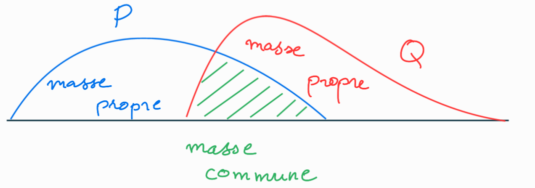
Distance en variation totale

Definition

On considère deux mesures de probabilités P et Q. La distance en variation totale entre P et Q est :

$$d_{TV}(P,Q) = \int d(P-Q)^+ = \int d(P-Q)^- = 1 - \int d(P \wedge Q).$$

- $0 \leq d_{TV}(P,Q) \leq 1$.
- Si les supports des mesures sont disjoints, la distance vaut 1.



Coefficient de β-mélange d'un couple

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Mesure de dépendance dans un couple (X, Y) de variables réelles : écart à la probabilité indépendante mesuré par la distance en variation totale.

Definition

$$\beta(X, Y) = d_{TV}(P_{X,Y}, P_X \otimes P_Y)$$

Couplage maximal

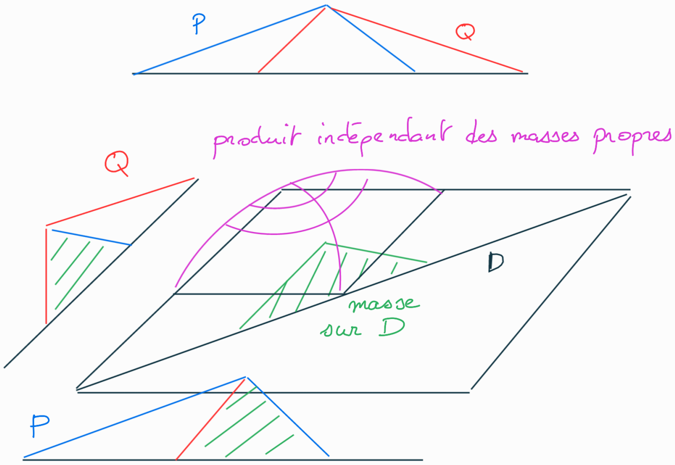
On se fixe les marginales P_X et P_Y et on cherche un couple (X, Y) qui réalise le maximum de $P(X = Y)$. Ce maximum est la masse commune aux deux distributions soit $1 - d_{TV}(P_X, P_Y)$:

Proposition

On peut construire un couple (X, Y) qui réalise le maximum $P(X = Y) = 1 - d_{TV}(P_X, P_Y)$.

Remarque : si $P_X = P_Y$ on prend simplement un couple (X, X).

Idée de la construction



Couplage avec condition

On se donne un couple (X, Y) de dépendance mesurée par $\beta(X, Y)$. On remplace Y par une variable Y' indépendante de X de même distribution que Y, la plus égale que possible à Y :

Proposition (lemme de Berbee)

Soit (X, Y) un couple de coefficient $\beta(X, Y)$. Il existe une variable Y' telle que

- *Y' et X sont indépendants.*
- *Y' et Y ont même distribution.*
- *Y' et Y sont égales avec probabilité $1 - \beta(X, Y)$.*

Couplage avec condition

Partant d'un couple (X, Y) de dépendance mesurée par $\beta(X, Y)$.

- On troque Y contre une version indépendante Y'.
- Plus $\beta(X, Y)$ est petit, moins il est nécessaire de modifier Y.
- Le troc a un prix $P(Y' \neq Y)$ égal à $\beta(X, Y)$.

Couplage avec condition

Partant d'un couple (X, Y) de dépendance mesurée par $\beta(X, Y)$.

- On troque Y contre une version indépendante Y'.
- Plus $\beta(X, Y)$ est petit, moins il est nécessaire de modifier Y.
- Le troc a un prix $P(Y' \neq Y)$ égal à $\beta(X, Y)$.

Oh le bon lait, mhhh, de Berbis

Couplage maximal pour les séries chronologiques

On considère les distributions P_X et P_Y de deux processus stationnaires réels à temps discret $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On note $X_{|_{]-\infty,0[}}$ le processus avant le temps 0 et $X_{|_{[k,+\infty[}}$ le processus après le temps k.

Definition (Couplage maximal progressif)

Le couple de processus (X, Y) de marginales P_X et P_Y est un couplage maximal progressif si et seulement si pour tout $k > 0$, le couple $(X_{|_{[k,+\infty[}}, Y_{|_{[k,+\infty[}})$ forme un couplage maximal.

Proposition (Existence du couplage maximal progressif (Goldstein))

Pour toute paire de distribution P_X et P_Y, il existe un couplage progressif maximal. On a $P(X_{|_{[k,+\infty[}} = Y_{|_{[k,+\infty[}}) = 1 - d_{TV}(P_{X,k}, P_{Y,k})$.

Fonction β pour les séries chronologiques

Definition

$$\beta(k) = \beta(\sigma(X_{|]-\infty,0[}), \sigma(X_{|[k,+\infty[})) = sup_{(Y,Z)}\beta(Y, Z),$$

où Y est une fonction mesurable des variables de $X_{|]-\infty,0[}$ et Z est une fonction mesurable des variables de $X_{|[k,+\infty[}$.

Proposition

$\beta(k)$ *est une fonction décroissante de* k.

Cette fonction mesure la mémoire du processus après un temps écoulé k.

Definition

Le processus est dit β-mélangeant si $\beta(k)$ tend vers 0 à l'infini.

Exemple : une chaîne de Markov à nombre d'état fini, irréductible et apériodique est telle que $\beta(k) < C\beta^k$, $0 < \beta < 1$.

Lemme de Berbee progressif conditionnel au passé

Proposition (Lemme de Berbee progressif)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire réel à temps discret. Il existe un processus futur $Y_1^{+\infty}$ tel que

- $Y_1^{+\infty}$ *et* $X_{-\infty}^0$ *sont indépendants*
- $Y_1^{+\infty}$ *et* $X_1^{+\infty}$ *ont même distribution.*
- *Pour tout temps* k*, les trajectoires* $Y_k^{+\infty}$ *et* $X_k^{+\infty}$ *sont égales avec probabilité* $1-\beta(k)$.

On peut échanger le futur du processus pour le rendre indépendant du passé. A chaque date k, les nouvelles trajectoires sont semblables aux trajectoires d'origine avec une grande probabilité (tendant vers 1 ??).

Lemme de Berbee progressif conditionnel au passé

Proposition (Lemme de Berbee progressif)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire réel à temps discret. Il existe un processus futur $Y_1^{+\infty}$ tel que

- *$Y_1^{+\infty}$ et $X_{-\infty}^{0}$ sont indépendants*
- *$Y_1^{+\infty}$ et $X_1^{+\infty}$ ont même distribution.*
- *Pour tout temps k, les trajectoires $Y_k^{+\infty}$ et $X_k^{+\infty}$ sont égales avec probabilité $1 - \beta(k)$.*

On peut changer sa vie future pour la rendre indépendante du passé. On garde sa riche personnalité (même distribution), on doit juste changer quelques choix pour faire oublier son passé. Plus le temps avance, moins on a besoin de faire attention.

Lemme de Berbee progressif conditionnel au passé

Proposition (Lemme de Berbee progressif)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire réel à temps discret. Il existe un processus futur $Y_1^{+\infty}$ tel que

- *$Y_1^{+\infty}$ et $X_{-\infty}^0$ sont indépendants*
- *$Y_1^{+\infty}$ et $X_1^{+\infty}$ ont même distribution.*
- *Pour tout temps k, les trajectoires $Y_k^{+\infty}$ et $X_k^{+\infty}$ sont égales avec probabilité $1-\beta(k)$.*

On peut changer sa vie future pour la rendre indépendante du passé. On garde sa riche personnalité (même distribution), on doit juste changer quelques choix pour faire oublier son passé. Plus le temps avance, moins on a besoin de faire attention.
Lemme de Barbie (Klaus).

Utilisation répétée du couplage conditionnel

En répétant la substitution, on peut remplacer un vecteur par un vecteur indépendant :

Proposition (Lemme d'Eberlein)

Soit $X = (X_i)_{i=1\dots,n}$ un vecteur aléatoire tel que $\beta(\sigma(X_1^j), \sigma(X_j^n)) = \beta$.
Il existe un vecteur $Y = (Y_i)_{i=1\dots,n}$ tel que

- *Les coordonnées de Y sont indépendantes.*
- *Les distributions des Y_i sont égales aux distributions des X_i.*
- $P(X \neq Y) = d_{TV}(P_X, P_Y) \leq (n-1)\beta$.

Utilisation répétée du couplage conditionnel

En répétant la substitution, on peut remplacer un vecteur par un vecteur indépendant :

Proposition (Lemme d'Eberlein)

Soit $X = (X_i)_{i=1\ldots,n}$ un vecteur aléatoire tel que $\beta(\sigma(X_1^j), \sigma(X_j^n)) = \beta$.
Il existe un vecteur $Y = (Y_i)_{i=1\ldots,n}$ tel que

- *Les coordonnées de Y sont indépendantes.*
- *Les distributions des Y_i sont égales aux distributions des X_i.*
- $P(X \neq Y) = d_{TV}(P_X, P_Y) \leq (n-1)\beta$.

Le lemme de Berlin, c'est quand plusieurs nazis font comme Barbie.

Inégalités de concentration

Soit X un vecteur centré vérifiant les hypothèses d'Eberlein. Alors si Y est le vecteur indépendant correspondant :

$$P(|\sum X_i| > t) \leq P(|\sum Y_i| > t) + P(X \neq Y).$$

Exemple : Supposons que $|X_i| \leq b$. L'inégalité de Hoeffding devient :

$$P(|\sum X_i| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2nb^2}\right) + (n-1)\beta.$$

Inégalités de concentration

Soit X un vecteur centré vérifiant les hypothèses d'Eberlein. Alors si Y est le vecteur indépendant correspondant :

$$P(|\sum X_i| > t) \leq P(|\sum Y_i| > t) + P(X \neq Y).$$

Exemple : Supposons que $|X_i| \leq b$. L'inégalité de Hoeffding devient :

$$P(|\sum X_i| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2nb^2}\right) + (n-1)\beta.$$

C'est Oufdingue !

Adaptation aux processus ponctuels [Cheysson et Lang 2026?]

Soit N un processus ponctuel stationnaire sur $\mathbb{R}$. On peut appliquer les résultats précédents aux séries de comptage de points $X_n = N([n\Delta, (n+1)\Delta])$ avec $\Delta > 0$. Pour passer au temps continu, on effectue un passage à la limite quand Δ tend vers 0.

Proposition (Existence du couplage maximal progressif (CL))

Pour toute paire de distribution P_N et $P_{N'}$, il existe un couplage progressif maximal. On a pour tout $t > 0$,
$P(N_{|[t,+\infty[} = N'_{|[t,+\infty[}) = d_{TV}(P_{N,[t,+\infty[}, P_{N',[t,+\infty[})$.

L'existence d'un couplage maximal progressif n'est pas garantie pour les distributions de processus en temps continu.

Exemples

- Couplage maximal progressif pour deux processus de Poisson homogènes de meme intensité : $N' = N$.
- Couplage maximal progressif pour deux processus de Poisson homogènes d'intensité différentes: N et N' quelconques, mesures sans support commun.
- Couplage maximal progressif pour deux processus de Poisson homogènes d'intensité différentes restreints à $[0, T]$ (Calcul explicite).

Coefficient de β-mélange

On redéfinit simplement le coefficient de mélange pour un processus stationnaire en temps continu :

$$\beta(t) = \beta(\sigma(X_{-\infty}^{0}), \sigma(X_t^{+\infty})) = sup_{(Y,Z)}\beta(Y, Z),$$

où Y est une fonction mesurable des variables de $X_{-\infty}^{0}$ et Z est une fonction mesurable des variables de $X_t^{+\infty}$.
On considère le processus de comptage à temps continu $N([0, t])$ et son coefficient de mélange $\beta(t)$.

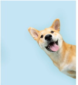
Proposition (Lemme de Berbee progressif (Cheysson Lang))

Soit N un processus ponctuel stationnaire sur $\mathbb{R}$. Il existe un processus futur N' sur $\mathbb{R}^+$ tel que

- $N_{|]-\infty,0[}$ *et* N' *sont indépendants.*
- N' *et* $N_{|[0,+\infty[}$ *ont même distribution.*
- *Pour tout* t, *les trajectoires* $N_{|[t,+\infty[}$ *et* $N'_{|[t,+\infty[}$ *sont égales avec probabilité* $1 - \beta(t)$.

Processus de Hawkes non linéaire

Le processus de Hawkes est défini par λ_t^*, intensité au temps t conditionnelle au passé.

Processus de Hawkes non linéaire lipschitchien 

$$\lambda_t^* = \Phi\left(\sum_i h(t - T_i)\right),$$

où Φ est une fonction de lien positive α-lipschichienne, 
h est une fonction intégrable pas nécessairement positive, telle que $\alpha \int |h| < 1$
les T_i sont les dates des points apparus avant t.

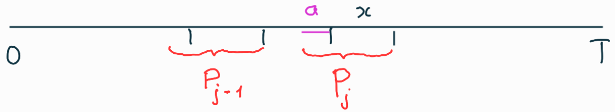
Résultats pour les processus de Hawkes (Cheysson Lang, 2026+n)

Soit N un processus de Hawkes non linéaire. On suppose $\int_t^\infty s|h(s)|ds < \infty$.

- On construit un couplage de Berbee tel que $P(N_{|[t,+\infty[} \neq N'_{|[t,+\infty[}) \leq M(t)$.
- Pour le couplage maximal (qui existe), cette quantité est minimale et égale à $\beta(t)$.
- On obtient donc une borne explicite $\beta(t) \leq M(t)$.
- M est exprimée à partir de h et de ses convoluées.
- Calcul explicite de M pour h à support fini, sous exponentiel, exponentiel, Pareto.

Inégalités de concentration

Soit N un processus de Hawkes stationnaire de coefficient de mélange $\beta(t)$.
Soit $a > 0$ et $m(t)$ une fonction calculée sur un morceau mobile de trajectoire $m(t) = F(N_{|[t-a,t[})$.
On définit $M(T) = \frac{1}{T}\int_0^T m(t)dt$.
On découpe l'intégrale en k segments de longueur $2x$ avec $x > a$. On note $P_j = \int_{2jx}^{2jx+x} m(t)dt$.
Les variables P_j sont calculées sur les points d'intervalles séparés par un intervalle de $x - a$.



On définit les variables $P'_j = \int_{2jx+x}^{2jx+2x} m(t)dt$. La distribution jointe est la même.

$$P(M(T) \geq u) = P\left(\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{k-1} P_j + P'_j \geq u\right) \leq 2P\left(\sum_{j=0}^{k-1} P_j \geq \frac{Tu}{2}\right).$$

Par le lemme d'Eberlein, pour des blocs Q_j indépendants, de même distribution que P_j.

$$P(M(T) \geq u) \leq 2P\left(\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{k-1} Q_j \geq Tu/2\right) + k\beta(x-a).$$

Gratia vobis pro concentratione spiritu vostri.